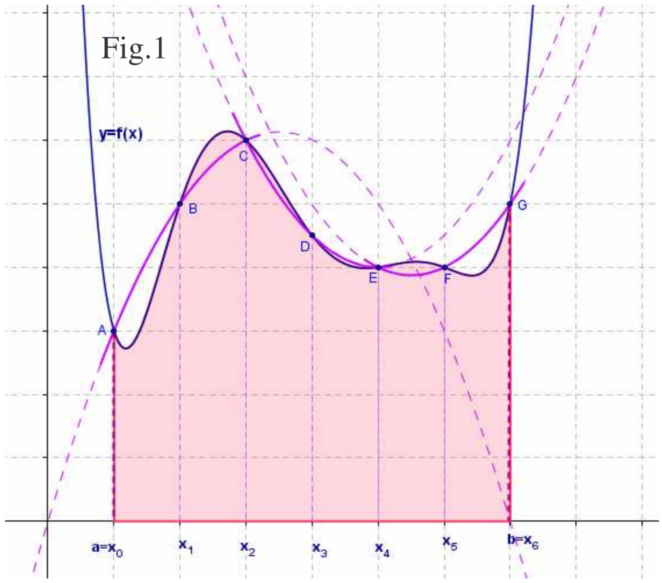
METODO DI **CAVALIERI-SIMPSON** (o delle parabole)
(per il calcolo approssimato[1] di integrali definiti)

Assieme ai metodi dei Rettangoli e dei Trapezi costituisce l'insieme dei metodi di Integrazione Numerica detti di Newton-Cotes, la cui caratteristica è la suddivisione dell'intervallo di integrazione [a,b] in *n* parti uguali. Mentre negli altri due metodi il numero n delle suddivisioni può essere un numero intero qualunque, per il metodo di Simpson il numero n delle suddivisioni deve necessariamente essere un numero pari.

Supponiamo, pertanto, di aver diviso l'intervallo [a,b] di integrazione in *n* parti uguali (*n* numero intero pari) e di aver calcolato le ordinate in corrispondenza di tutti i "nodi" x_i. Siano cioè note le coordinate dei punti $A(a;f(a))$, $B(x_1;f(x_1))$, $C(x_2;f(x_2))$, $D(x_3;f(x_3))$...



Nei metodi dei rettangoli e dei trapezi avevamo parlato di "costruzione di rettangoli e trapezi" in corrispondenza di ciascuno degli intervalli di suddivisione.

Avremmo anche potuto dire che, in ciascun intervallo, la funzione integranda f(x) viene sostituita da una funzione più elementare: dalla funzione y=k (funzione costante) per quanto riguarda il metodo dei rettangoli e dalla funzione y=mx+p (funzione lineare) per quanto riguarda il metodo dei trapezi.

Ebbene, **nel metodo di Simpson** si sostituisce il grafico della funzione integranda (y=f(x)), presente in due intervallini consecutivi, con il grafico della parabola che ha tre punti in comune con il grafico di f(x); per il resto si procede in modo analogo.

La formula finale di Cavalieri-Simpson relativa all'intero intervallo di integrazione [a,b],

che permette di calcolare l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ **è la seguente:**

N.B. Per comodità di scrittura ***poniamo k=n/2*** *(n pari).*[2]

$$\boxed{Area = \frac{\Delta x}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{i\ pari}) + 4\cdot\sum_{i=1}^{k} f(x_{i\ dispari}) \right]}$$

Il ragionamento che permette di giungere a tale formula è un po' più complesso rispetto a quello seguito per ricavare la formula dei rettangoli e dei trapezi.

---

1 Nel caso di integrazione di polinomi, il metodo di Simpson fornisce **risultati esatti** per polinomi fino al terzo grado, anche utilizzando soltanto due suddivisioni (N=2)!!!

2 Con **k** indichiamo in sostanza il numero totale delle ascisse dispari (l'ultima di queste ha posto N-1, ricordando che abbiamo considerato $a=x_0$ e $b=x_n$).

PROCEDIAMO A PICCOLI PASSI.

Considerando intanto i punti di ascissa x_2, x_3 x_4. Come verrà dimostrato in seguito l'area della parte di piano compresa tra la parabola (che sostituisce f(x)), l'asse x e le due rette verticali di equazione $x = x_2$ e $x = x_4$ è calcolabile mediante la seguente formula:

$Area = \frac{x_4 - x_2}{6}\left(f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4) \right)$ o meglio: $\boxed{Area = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right]}$

(essendo $x_4 - x_2 = 2 \cdot \Delta x$; in quanto, dividendo l'intervallo di integrazione in un certo numero n di intervallini, l'ampiezza di ciascuno di essi è data da $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, ma la quantità "x_4-x_2" corrisponde all'ampiezza di due intervalli).

L'espressione $Area = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right]$ rappresenta la formula di Simpson relativa a tre punti consecutivi (C, D, E, in figura).

Volendo estendere questa formula all'intero intervallo di integrazione [a,b], occorre osservare che non tutti i valori di $\mathbf{x_i}$ hanno lo stesso ruolo: quelli di posto dispari (come x_3) sono tali che le rispettive ordinate vanno moltiplicate per 4; quelli di posto pari (come x_2 e x_4), praticamente estremi di ogni coppia di intervalli , sono tali che le rispettive ordinate (eccetto prima e ultima) vanno considerate due volte (una volta come estremo destro e una volta come estremo sinistro). Pertanto, la formula finale di Cavalieri-Simpson relativa all'intero intervallo di integrazione [a,b] è (come già detto):

$$\boxed{Area = \frac{\Delta x}{3}\left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} f(x_{i\ pari}) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{k} f(x_{i\ dispari}) \right]}$$ (k=N/2).

Vediamo ora di capire perché nell'intervallo [x_2,x_4] la formula di Simpson è:

$$Area = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right].$$

Lo possiamo capire attraverso due dimostrazioni (una geometrica, l'altra algebrica)…
Ciascuno studi quella che gli sembra più semplice!

DETERMINAZIONE DELLA FORMULA DI SIMPSON
relativa a tre punti consecutivi.

Dimostrazione Algebrica.

I tre punti C, D, E (vedi figura 1 - pagina 1) hanno coordinate rispettivamente $C(x_2;f(x_2))$, $D(x_3;f(x_3))$, $E(x_4;f(x_4))$; per essi passa la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$.
Non determiniamo l'equazione della parabola passante per i tre punti, ma operiamo come se i coefficienti a, b, c fossero noti (come se li avessimo calcolati).

L'area compresa tra l'arco di parabola CDE e l'asse x è dato dal seguente integrale:

$$\text{Area} = \int_{x_2}^{x_4} (ax^2 + bx + c)dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right]_{x_2}^{x_4} = \frac{a}{3}x_4^3 + \frac{b}{2}x_4^2 + cx_4 - \frac{a}{3}x_2^3 - \frac{b}{2}x_2^2 - cx_2 =$$

$$= \frac{2ax_4^3 - 2ax_2^3 + 3bx_4^2 - 3bx_2^2 + 6cx_4 - 6cx_2}{6} = \frac{2a(x_4^3 - x_2^3) + 3b(x_4^2 - x_2^2) + 6c(x_4 - x_2)}{6} =$$

$$\textbf{NOTA}^3 = \frac{2a(x_4 - x_2)(x_4^2 + x_2x_4 + x_2^2) + 3b(x_4 - x_2)(x_4 + x_2) + 6c(x_4 - x_2)}{6},$$

da qui, raccogliendo a fattor comune il binomio $(x_4 - x_2)$ si ha:

$$\text{Area} = \frac{(x_4 - x_2)}{6}\left[2a(x_4^2 + x_2x_4 + x_2^2) + 3b(x_4 + x_2) + 6c\right] =$$

$$= \frac{(x_4 - x_2)}{6}\left[2ax_4^2 + 2ax_2x_4 + 2ax_2^2 + 3bx_4 + 3bx_2 + 6c\right] \quad <***>$$

Attenzione: la quantità tra parentesi quadre non è nota (non si conoscono i coefficienti a, b, c), però dobbiamo ancora utilizzare le condizioni di appartenenza.
C,D,E sono punti della parabola, possiamo pertanto scrivere:

<1> $f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c$

<2> $f(x_4) = ax_4^2 + bx_4 + c$

$f(x_3) = ax_3^2 + bx_3 + c$

e tenendo conto del fatto che $x_3 = \dfrac{x_2 + x_4}{2}$, quest'ultima, diventa:

$$f(x_3) = a\left(\frac{x_2 + x_4}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_2 + x_4}{2}\right) + c \qquad \text{cioè:} \quad f(x_3) = \frac{a}{4}(x_2^2 + 2x_2x_4 + x_4^2) + \frac{b}{2}(x_2 + x_4) + c$$

da cui si può dedurre:

<3> $4f(x_3) = ax_2^2 + 2xa_2x_4 + ax_4^2 + 2bx_2 + 2bx_4 + 4c$

In conclusione: la quantità tra parentesi dell'espressione <***> coincide esattamente con la somma dei secondi membri delle uguaglianze **<1> <2> <3>** [controllare!], per cui può essere sostituita dalla somma dei rispettivi primi membri e, così facendo, si ottiene:

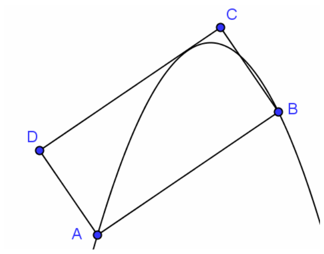
$\Rightarrow \Rightarrow$ $\quad \text{Area} = \dfrac{(x_4 - x_2)}{6}\left[f(x_2) + f(x_4) + 4f(x_3)\right]$ che è ciò che si voleva dimostrare!!!

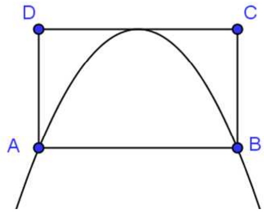
[3] Ricordare due prodotti notevoli: $\mathbf{A^3\text{-}B^3=(A\text{-}B)(A^2+AB+B^2)}$ e $\mathbf{A^2\text{-}B^2=(A\text{-}B)(A+B)}$.

<u>Dimostrazione Geometrica</u>.

Innanzitutto è necessario ricordare (o comunque possedere) le seguenti conoscenze:

<u>Enunciato del teorema di Archimede</u>: "L'area del segmento parabolico (ossia della parte di piano compresa tra parabola e corda) è equivalente ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo avente un lato coincidente con la corda[4] (del segmento parabolico) e l'altro lato (quello opposto) tangente alla parabola".





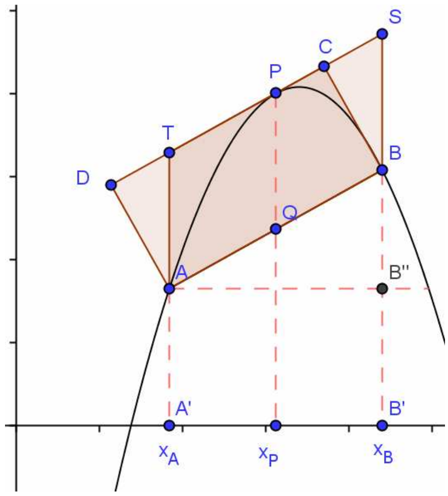
<u>Osservazione1</u>.

Un rettangolo è equivalente (ossia ha la stessa area) a un parallelogramma (qualunque) purché abbia la stessa base e la stessa altezza del rettangolo; cioè: Area(ABCD)=Area(EFCD). La dimostrazione è immediata: si basa sulla congruenza dei triangoli AED e BFC.

<u>Osservazione2</u>.

Qualunque sia l'inclinazione della corda AB, la retta tangente alla parabola e parallela alla corda AB "tocca" la parabola in un punto la cui ascissa è la media aritmetica delle ascisse di A e di B, cioè $x_P = \frac{x_A + x_B}{2}$.

Fig.2



Dimostrazione. La parabola ha equazione generica $y = ax^2 + bx + c$, i punti A e B hanno coordinate $A(x_A; ax_A^2 + bx_A + c)$ e $B(x_B; ax_B^2 + bx_B + c)$: il coefficiente angolare della retta AB diventa:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$$

$$= \frac{ax_B^2 + bx_B + c - ax_A^2 - bx_A - c}{x_B - x_A} =$$

$$= \frac{a(x_B^2 - x_A^2) + b(x_B - x_A)}{x_B - x_A},$$

da questa, scomponendo e raccogliendo a fattor comune, si ottiene:

$m_{AB} = \frac{(x_B - x_A)\cdot[a(x_B + x_A) + b]}{x_B - x_A}$ e cioè: $m_{AB} = a(x_B + x_A) + b$ (con $x_B \neq x_A$).

Per ultimare la dimostrazione si calcoli la derivata generica della parabola e si determini il valore di x in cui la derivata ha il valore uguale a m_{AB}….. Si scoprirà che tale valore di x coincide con la media aritmetica tra x_A e x_B.

[4] Il teorema di Archimede è valido qualunque sia l'inclinazione della corda AB.

Area della parte di piano compresa tra un arco di parabola, due rette verticali e l’asse x.

Fare riferimento alla figura 2. La parte di piano considerata (limitata da: arco di parabola, asse x e due rette verticali) può essere calcolata come somma tra l’area del trapezio rettangolo B’BAA’ e l’area del segmento parabolico.
Le basi del trapezio sono: $A'A = f(x_A)$ e $B'B = f(x_B)$; mentre l’altezza è $A'B' = (x_B - x_A)$.

L’area del trapezio è: $\frac{A'B'}{2} \cdot (A'A + B'B) = \frac{x_B - x_A}{2} \cdot \left(f(x_A) + f(x_B) \right)$.

Per calcolare l’area del segmento parabolico mediante il teorema di Archimede, consideriamo, al posto del rettangolo di base ABCD, il parallelogramma ABST (l’area è la stessa!). In questo parallelogramma conviene considerare come base il lato BS, cosicché l’altezza diventa AB’’ che coincide con $A'B' = (x_B - x_A)$.

Per calcolare la base BS osserviamo che essa è uguale a PQ, dove Q, essendo punto medio di AB, ha coordinate $Q\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$. La misura della base del parallelogramma è:

$BS = PQ = y_P - y_Q = y_P - \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2y_P - y_A - y_B}{2} = \frac{1}{2}\left(2 \cdot f(x_P) - f(x_A) - f(x_B) \right)$. Si ha:

$Area_{Parall} = BS \cdot AB'' = \frac{1}{2}\left(2 \cdot f(x_P) - f(x_A) - f(x_B) \right) \cdot \left(x_B - x_A \right)$; e quindi:

$$Area_{SegmPar} = \frac{2}{3} Area_{Parall} = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\left(2 \cdot f(x_P) - f(x_A) - f(x_B) \right) \cdot \left(x_B - x_A \right) =$$

$$= \frac{x_B - x_A}{3} \cdot \left(2 \cdot f(x_P) - f(x_A) - f(x_B) \right).$$

L’area richiesta (area trapezio + area segmento parabolico) risulta pertanto:

$$\frac{x_B - x_A}{2}\left(f(x_A) + f(x_B) \right) + \frac{x_B - x_A}{3} \cdot \left(2 \cdot f(x_P) - f(x_A) - f(x_B) \right).$$

Riducendo allo stesso denominatore e raccogliendo a fattor comune si ha:

$$\frac{x_B - x_A}{6} \cdot \left(3f(x_A) + 3f(x_B) + 4f(x_P) - 2f(x_A) - 2f(x_B) \right) = \frac{x_B - x_A}{6} \cdot \left(f(x_A) + 4f(x_P) + f(x_B) \right).$$

Quest’ultima espressione rappresenta la formula di Simpson relativa all’intervallo di estremi A e B, con P punto medio di AB.

Applicando questa formula all’intervallo $[x_2,x_4]$ della figura iniziale e osservando che $x_B - x_A$ nel nostro caso diventa $x_4 - x_2 = 2\Delta x$, si ha:

$$Area = \frac{\cancel{2}\Delta x}{\cancel{6}}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right] = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right].$$ **C.V.D.**